МЕХАНИКА
MECHANICS



УДК 539.3 10.23947/1992-5980-2017-17-1-18-27

Распространение упругих волн через периодическую систему трещин в низкочастотном режиме*

М. Ю. Ремизов[1]**

[1]Академия строительства и архитектуры, Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

Low-frequency penetration of elastic waves through a periodic array of cracks***

M. Yu. Remizov[1]**

[1]Academy of Construction and Architecture, Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

Введение. Исследование проникновения упругих волн через периодические решетки является важной проблемой в области ультразвуковой количественной оценки материалов, распространения звука и для электромагнитных волноводов с диафрагмами. На практике аналитические результаты могут быть получены в предположении низкой частоты, со слабым режимом взаимодействия, когда лишь некоторые приближенные результаты можно установить в аналитической форме.

Материалы и методы. В предыдущих работах автором изучены 3-D задача проникновения волны нормальной плоскости с бесконечной двоякопериодической системой трещин в низкочастотном режиме и 2-D задача проникновения волны нормально двум системам, когда каждая содержит бесконечный периодический массив трещин.Целью настоящей работы является обобщение полученных ранее данных — результатов исследования свойств рассматриваемой системы, основанного на плоской задаче о распространении волн в упругих средах с периодическим массивом трещин.

Результаты исследования. Настоящая работа продолжает изучение 2-D задачи для трех параллельных массивов, образующих двоякопериодическую систему. Исследование посвящено выводу аналитических выражений коэффициентов отражения и прохождения, когда плоская продольная волна падает на систему трех идентичных плоских решеток, расположенных друг за другом. В режиме частотного диапазона одной моды задача сводится к системе гиперсингулярных интегральных уравнений, решение которой дает эти коэффициенты и явное представление волнового поля внутри структуры.

Обсуждения и заключения. Применяемый метод позволяет управлять акустическим фильтром в рассматриваемой решетке выбором соответствующей длины трещины, частоты и

Introduction. The investigation of elastic wave penetration through periodic gratings is an important problem in the fields of the ultrasonic quantitative evaluation of materials, sound propagation and electromagnetic waveguides with diaphragms. In practice, analytical results can be obtained under the assumption of low frequency, with a weak interaction regime where some approximated results can be established in an analytical form.

Materials and Methods. In the previous papers, the 3-D normal penetration of a wave through a plane screen with an infinite doubly periodic system of cracks with a low frequency assumption and the 2-D normal penetration of a wave through a couple of the systems with an infinite periodic array of cracks are studied. The present study objective is to generalize the results obtained before extending the explicit analytical expressions of he considered coefficients for the system of parallel plane screens based on the context of the in-plane problem for the wave propagation through elastic solids with a periodic array of cracks.

Research Results. The present work continues to study the 2-D problem for three such parallel arrays which form a doubly-periodic system. The investigation is devoted to the derivation of the analytic expressions for coefficients of reflection and transmission when a longitudinal plane wave falls on the system of three identical two-dimensional gratings. In the one-mode range, the approximation of the problem is reduced to a system of the hypersingular integral equations whose solution gives these coefficients and an explicit representation of the wave field inside the structure.

Discussion and Conclusions. The desired control of the acoustic filtering in the considered grating can be arranged by the appropriate choice of the crack's length, respective frequency interval,

---

*Работа выполнена в рамках инициативной НИР.

**E-mail: remizov72@mail.ru

***The research is done within the frame of the independent R&D.

расстояния между двумя вертикальными массивами, содержащими периодическую систему трещин.

and finally — by the distance between two vertical arrays containing periodic systems of cracks.

Ключевые слова: коэффициенты отражения и прохождения, диапазон частоты, периодическая решетка, интегральное уравнение, система трещин, акустический фильтр.

Keywords: coefficients of reflection and transmission, frequency range, periodic array, integral equation, array of cracks, acoustic filter.

Введение. Исследование проникновения упругих волн через периодические решетки является важной проблемой в области ультразвуковой количественной оценки материалов, распространении звука и для электромагнитных волноводов с диафрагмами. Различные численные методы были применены в двумерных задачах с периодическими отверстиями произвольной формы [1–3]. Результаты компьютерного моделирования продемонстрировали высокую точность. При этом развиваются и аналитические теории. На практике некоторые приближенные результаты можно установить в аналитической форме в предположении режима низких частот при слабом взаимодействии волн. Таким образом, аналитические методы, обеспечивающие явные формулы для соответствующих параметров рассеяния, задают только определенный низкочастотный предел. В работах [4–7] получены явные аналитические формулы:
— для параметров отражения и прохождения в режиме одной моды акустической волны, проникающей сквозь двояко-, троякопериодические массивы отверстий и объемных препятствий произвольной формы;
— для плоских задач распространения волн через периодический массив трещин в упругих твердых телах [8].

Случаи высокочастотной дифракции на трещине анализировались в [9–11].

В данной работе изучаются три массива, каждый из которых представляет собой периодическую систему трещин в двумерной постановке. Как показано в [12], качественные свойства такой геометрии аналогичны соответствующей плоской задаче для двух массивов. Предполагается, что при нормальном падении волны имеет место режим распространения одной моды, т. е. $ak_2 < \pi$, где k_2 — волновое число поперечной волны e^{ik_1x}, $2a$ — период данной системы. А также расстояние d является таким, что выполняется условие $d/a >> 1$.

Целью настоящей работы является обобщение результатов, полученных ранее в [12, 13], и вывод новых аналитических выражений коэффициентов для системы трех параллельных экранов (с учетом свойств ядра гиперсингулярного интегрального уравнения). Соответствующие вычисления основываются на решении плоской задачи распространения волны в упругом теле с периодическим массивом трещин.

Постановка задачи. Вывод интегральных уравнений. Рассмотрим структуру, состоящую из трех бесконечных массивов коллинеарных трещин, вертикально расположенных в $x = 0; d; 2d$. Каждая из трещин, длина которой $2b$, расположена с периодичностью $2a$ по оси y. При изучении падения плоской продольной волны e^{ik_1x} на данную систему вдоль положительного направления оси x, в силу симметрии вопрос сводится к рассмотрению волновода ширины $2a$ (рис. 1).

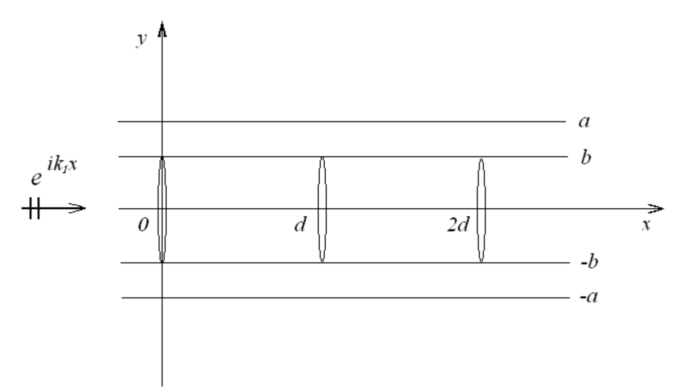


Рис. 1. Фрагмент периодического массива трещин

Fig. 1. Segment of periodic array of cracks

Тогда потенциалы, удовлетворяющие уравнению Гельмгольца, есть функции:

$$\phi^{left}=e^{ik_1x}+Re^{-ik_1x}+\sum_{n=1}^{\infty}A_ne^{q_nx}\cos\left(\frac{\pi ny}{a}\right);$$

$$\psi^{left}=\sum_{n=1}^{\infty}B_ne^{r_nx}\sin\left(\frac{\pi ny}{a}\right),\quad x<0;$$

$$\phi^{s}=e^{ik_1x}+F_0^s\cos[k_1(x-x_{s-1})]+H_0^s\cos[k_1(x-x_s)]+\sum_{n=1}^{\infty}\{F_n^s ch[q_n(x-x_{s-1})]+H_n^s ch[q_n(x-x_s)]\}\cos\left(\frac{\pi ny}{a}\right);$$

$$\psi^{s}=\sum_{n=1}^{\infty}\{G_n^s ch[r_n(x-x_{s-1})]+P_n^s ch[r_n(x-x_s)]\}\sin\left(\frac{\pi ny}{a}\right),\ (s-1)d<x<sd;\ s=1,2;$$

$$\phi^{right}=Te^{ik_1[x-2d]}+\sum_{n=1}^{\infty}C_ne^{-q_n[x-2d]}\cos\left(\frac{\pi ny}{a}\right);$$

$$\psi^{right}=\sum_{n=1}^{\infty}D_ne^{-r_n[x-2d]}\sin\left(\frac{\pi ny}{a}\right);\ x>2d. \tag{1}$$

Заглавные буквы здесь являются неизвестными константами, а

$$q_n=\left[\left(\pi n/a\right)^2-k_1^2\right]^{1/2},\ r_n=\left[\left(\pi n/a\right)^2-k_2^2\right]^{1/2}. \tag{2}$$

Гармонический временной множитель берется в виде $e^{-i\omega t}$, k_1,k_2 являются продольным и поперечным волновыми числами, а R, T — коэффициенты отражения и прохождения соответственно. Далее возьмем компоненты тензора напряжений σ_{xx}; σ_{xy} и вектора перемещений u_x,u_y в терминах потенциалов, используя стандартные формулы Грина — Ламе. В рассматриваемой задаче плоская продольная волна с потенциалами $\phi_0=e^{ik_1x}$, $\psi_0=0$ приходит из $-\infty$ и порождает отраженное поле. Предполагая непрерывность поля перемещений вне трещин, введем следующий вектор неизвестных функций $g_x(y),g_y(y)$, $|y|<b$:

$$\bar{u}^{(left)}-\bar{u}^{(1)}=\bar{g}^1(y),\ x=0;\qquad \bar{u}^{(1)}-\bar{u}^{(2)}=\bar{g}^2(y),\ x=d;\qquad \bar{u}^{(2)}-\bar{u}^{(right)}=\bar{g}^3(y),\ x=2d. \tag{3}$$

Используя (1)–(3), найдем все необходимых постоянные, входящие в потенциалы (1), через $g_x(y),g_y(y)$. Для этого сначала проинтегрируем уравнения (3) по отрезку $|y|<a$, чтобы получить систему для 6 коэффициентов, не входящих под знак суммы в выражениях для потенциалов:

$$-ik_1R-H_0^1k_1\sin(k_1d)=\frac{1}{2a}\int_{-b}^{b}g_x^1(y)dy\ ;$$

$$-F_0^1k_1\sin(k_1d)-H_0^2k_1\sin(k_1d)=\frac{1}{2a}\int_{-b}^{b}g_x^2(y)dy\ ;$$

$$-F_0^2k_1\sin(k_1d)+ik_1e^{ik_12d}-ik_1T=\frac{1}{2a}\int_{-b}^{b}g_x^3(y)dy\ . \tag{4}$$

Свойство ортогональности тригонометрических функций с учетом предположений метода $q_nd>>1,\quad n=1,2,3...$ приведет (3) к соотношениям, связывающим остальные 12 коэффициентов:

$$[A_n+H_n^1sh(q_nd)]q_n+[B_n-P_n^1ch(r_nd)D_{nj}^{(3)}]\frac{\pi n}{a}=\frac{1}{2a}\int_{-b}^{b}g_x^1(y)\cos\left(\frac{\pi ny}{a}\right)dy\ ;$$

$$[-A_n+H_n^1ch(q_nd)]\frac{\pi n}{a}-[B_n+P_n^1sh(r_nd)]r_n=\frac{1}{2a}\int_{-b}^{b}g_y^1(y)\sin\left(\frac{\pi ny}{a}\right)dy\ ;$$

$$[F_n^1+H_n^2]q_nsh(q_nd)+[G_n^1-P_n^2]\frac{\pi n}{a}ch(r_nd)=\frac{1}{2a}\int_{-b}^{b}g_x^2(y)\cos\left(\frac{\pi ny}{a}\right)dy\ ;$$

$$[-F_n^1+H_n^2]\frac{\pi n}{a}ch(q_nd)-[G_n^1+P_n^2]r_nsh(r_nd)=\frac{1}{2a}\int_{-}^{b}g_y^2(y)\sin\left(\frac{\pi ny}{a}\right)dy\ ;$$

$$[F_n^2 sh(q_n d)+C_n]q_n-[G_n^2 ch(r_n d)-D_n]\frac{\pi n}{a}=\frac{1}{2a}\int_{-b}^{b} g_x^3(y)\cos\left(\frac{\pi n y}{a}\right)dy\,;$$

$$[-F_n^2 ch(q_n d)+C_n]\frac{\pi n}{a}-[G_n^2 sh(r_n d)+D_n]r_n=\frac{1}{2a}\int_{-b}^{b} g_y^3(y)\sin\left(\frac{\pi n y}{a}\right)dy\,. \tag{5}$$

Условия непрерывности напряжений на границе имеют место в виде

$$\sigma_{xx}^{(left)}=\sigma_{xx}^{(1)};\ \sigma_{xy}^{(left)}=\sigma_{xy}^{(1)},\ x=0\,;\ \sigma_{xx}^{(1)}=\sigma_{xx}^{(2)};\ \sigma_{xy}^{(1)}=\sigma_{xy}^{(2)},\ x=d\,;\ \sigma_{xx}^{(2)}=\sigma_{xx}^{(right)};\ \sigma_{xy}^{(2)}=\sigma_{xy}^{(right)},\ x=2d\,. \tag{6}$$

После применения для (6) аналогичной процедуры интегрирования по отрезку и принимая во внимание свойство ортогональности тригонометрической функции, получим остальные 9 соотношений, которые вместе с (4) и (5) образуют алгебраическую систему с 18 неизвестными постоянными задачи. Часть решения системы, соответствующая $x=0$, определяет постоянные $P_n^1, A_n, B_n, H_n^{(1)}, F_0^{(1)}, H_0^{(1)}, R$, выражения которых, используемые ниже, принимают вид:

$$F_0^1=\frac{e^{ik_1 d}}{4ak_1\sin(k_1 d)}\int_{-b}^{b} g_x^1(\eta)d\eta-\frac{1}{4ak_1\sin(k_1 d)}\int_{-b}^{b} g_x^2(\eta)d\eta-\frac{e^{ik_1 d}}{4ak_1\sin(k_1 d)}\int_{-b}^{b} g_x^3(\eta)d\eta\,;$$

$$H_0^1=-\frac{1}{4ak_1\sin(k_1 d)}\int_{-b}^{b} g_x^1(\eta)d\eta+\frac{e^{ik_1 d}}{4ak_1\sin(k_1 d)}\int_{-b}^{b} g_x^2(\eta)d\eta+\frac{e^{ik_1 2d}}{4ak_1\sin(k_1 d)}\int_{-b}^{b} g_x^3(\eta)d\eta\,;$$

$$R=-\frac{1}{4ak_1 i}\int_{-b}^{b} g_x^1(\eta)d\eta-\frac{e^{ik_1 d}}{4ak_1 i}\int_{-b}^{b} g_x^2(\eta)d\eta-\frac{e^{ik_1 2d}}{4ak_1 i}\int_{-b}^{b} g_x^3(\eta)d\eta\,;$$

$$H_n^1=\frac{1}{2ash(q_n d)}[-\frac{r_{nj}^2+a_n^2}{q_n k_2^2}\int_{-b}^{b} g_x^1(\eta)\cos\left(\frac{\pi n\eta}{a}\right)d\eta+\frac{2a_n}{k_2^2}\int_{-b}^{b} g_y^1(\eta)\sin\left(\frac{\pi n\eta}{a}\right)d\eta]\,;$$

$$A_n=\frac{1}{2a}[-\frac{r_{nj}^2+a_n^2}{q_n k_2^2}\int_{-b}^{b} g_x^1(\eta)\cos\left(\frac{\pi n\eta}{a}\right)d\eta-\frac{2a_n}{k_2^2}\int_{-b}^{b} g_y^1(\eta)\sin\left(\frac{\pi n\eta}{a}\right)d\eta]\,;$$

$$B_n=\frac{1}{2a}[\frac{2a_n}{k_2^2}\int_{-b}^{b} g_x^1(\eta)\cos\left(\frac{\pi n\eta}{a}\right)d\eta-\frac{\gamma_0}{c_1^2 r_n k_1^2}\int_{-b}^{b} g_y^1(\eta)\sin\left(\frac{\pi n\eta}{a}\right)d\eta]\,;$$

$$P_n^1=\frac{1}{2ash(q_n d)}[-\frac{2a_n}{k_2^2}\int_{-b}^{b} g_x^1(\eta)\cos\left(\frac{\pi n\eta}{a}\right)d\eta-\frac{\gamma_0}{c_1^2 r_n k_1^2}\int_{-b}^{b} g_y^1(\eta)\sin\left(\frac{\pi n\eta}{a}\right)d\eta]\,. \tag{7}$$

Формулы для остальных постоянных для краткости опускаем.

Теперь полученные постоянные используются для удовлетворения условий равенства нулю компонент тензора напряжений на трещине. Здесь следует принять во внимание, что в задаче остаются только нетривиальные функции раскрытия $g_x^s(y);|\,y\,|<b;\ s=1,2,3$, учитываемые в соотношениях

$$\sigma_{xx}^{(left)}=\sigma_{xx}^{(1)}=0,\quad x=0\,;\ \sigma_{xx}^{(1)}=\sigma_{xx}^{(2)}=0,\quad x=d\,;\ \sigma_{xx}^{(2)}=\sigma_{xx}^{(right)}=0,\quad x=2d\,. \tag{8}$$

Опуская промежуточные преобразования, окончательно получаем следующую систему трех интегральных уравнений относительно функций $g_x^s(y);|\,y\,|<b;\ s=1,2,3$:

$$-\frac{1}{2a}\int_{-b}^{b} K(y-t)g_x^1(t)dt+\frac{e^{ik_1 d}}{4ak_1 i}\int_{-b}^{b} g_x^2(t)dt+\frac{e^{ik_1 2d}}{4ak_1 i}\int_{-b}^{b} g_x^3(t)dt=1\,;$$

$$\frac{e^{ik_1 d}}{4ak_1 i}\int_{-b}^{b} g_x^1(t)dt-\frac{1}{2a}\int_{-b}^{b} K(y-t)g_x^2(t)dt+\frac{e^{ik_1 d}}{4ak_1 i}\int_{-b}^{b} g_x^3(t)dt=e^{ik_1 d}\,;$$

$$\frac{e^{ik_1 2d}}{4ak_1 i}\int_{-b}^{b} g_x^2(t)dt+\frac{e^{ik_1 d}}{4ak_1 i}\int_{-b}^{b} g_x^2(t)dt-\frac{1}{2a}\int_{-b}^{b} K(y-t)g_x^3(t)dt=e^{ik_1 2d}\,, \tag{9}$$

где $K(y)=i/2k_1+\sum_{n=1}^{\infty}(R_n/q_n k_2^2)\cos(\pi n y/a),\quad R_n=[2a_n^2-k_2^2]^2-4r_n q_n a_n^2,\quad a_n=\pi n/a.$

Свойства интегрального уравнения. Начнем с рассмотрения вспомогательного интегрального уравнения:

$$\frac{1}{2a}\int_{-b}^{b} h(\eta)K(y-\eta)d\eta = 1\,;\; K(y)=\sum_{n=1}^{\infty} L_n\cos(a_n y)\,;\; L_n=\frac{R_n}{k_2^2 q_n},\quad |y|<b\,. \tag{10}$$

Заметим, что $L_n \sim -2(1-c_2^2/c_1^2)a_n,\ n\to\infty.$ Тогда выражение ядра преобразуется к виду:

$$K(y)=-2\left(1-\frac{c_2^2}{c_1^2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(a_n y)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[L_n+2\left(1-\frac{c_2^2}{c_1^2}\right)a_n\right]\cos(a_n y),\qquad K(y)=-2\left(1-\frac{c_2^2}{c_1^2}\right)I\ (y)+K_r(y)\,.$$

Здесь вторая сумма ядра есть некоторая регулярная функция. Первая имеет как регулярную, так и сингулярную части: $I(y)=[I_r(y)+I_s(y)]$, для выделения которых рассмотрим выражение

$$\frac{a}{\pi}I(y)=\sum_{n=1}^{\infty}n\cos(\frac{\pi n}{a}y)\,. \tag{11}$$

Используя обобщенное представление для суммы (11), имеем преобразование $\sum_{n=1}^{\infty}n\cos(\frac{\pi n}{a}y)=\lim_{\varepsilon\to+0}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\varepsilon n}n\cos(\frac{\pi n}{a}y)=-\frac{1}{4\sin^2(\pi y/2a)}$, $(\sim -\frac{a^2}{\pi^2 y^2},\ y\to 0)$, после чего ядро вспомогательного интегрального уравнения (10) представляется в виде: $K(y)=-2(1-c_2^2/c_1^2)[I_r(y)+I_s(y)]+K_r(y)$, где сингулярная и регулярная части есть соответственно $I_s(y)=-\frac{a}{\pi\ y^2}$, $I_r(y)=\frac{a}{\pi\ y^2}-\frac{\pi}{4a\sin^2(\pi y/2a)}$.

Легко видеть, что особенность ядра для малых аргументов содержит гиперсингулярность по одной переменной, возникающую в теории трещин, хорошо известную в задачах теории упругости в неограниченных средах [14]. Для устойчивости численного метода при выполнении расчетных экспериментов здесь применяется дискретная квадратурная формула для гиперсингулярных одномерных ядер, известная как «метод дискретных вихрей» [15]. Используя новое представление ядра основного интегрального уравнения (10), перепишем его следующим образом:

$$\frac{1}{2a}\int_{-b}^{b}h(\eta)\left[\Phi_r(y-\eta)+\frac{2a[1-\frac{c_2^2}{c_1^2}]}{\pi(y-\eta)^2}\right]d\eta=1\,,\ \Phi_r(y)=-2[1-\frac{c_2^2}{c_1^2}]I_r(y)+K_r(y). \tag{12}$$

Дискретизация интегрального соотношения (12) приводит к формуле

$$\frac{1}{2a}\sum_{k=1}^{N}\int_{\eta_{k-1}}^{\eta_k}h(\eta)\left[\Phi_r(y_l-\eta)+\frac{2a[1-\frac{c_2^2}{c_1^2}]}{\pi(y_l-\eta)^2}\right]d\eta=\frac{1}{2a}\sum_{k=1}^{N}h(\eta_k)\int_{\eta_{k-1}}^{\eta_k}h(\eta)\left[\Phi_r(y_l-\eta_k)\varepsilon_1+\frac{2a[1-\frac{c_2^2}{c_1^2}]}{\pi(y_l-\eta)^2}d(\eta-y_l)\right]=$$

$$=\frac{1}{2a}\sum_{k=1}^{N}h(\eta_k)\left[\Phi_r(y_l-\eta_k)\varepsilon_1+\frac{2a[1-\frac{c_2^2}{c_1^2}]}{\pi(y_l-\eta_k)}-\frac{2a[1-\frac{c_2^2}{c_1^2}]}{\pi(y_l-\eta_{k-1})}\right],$$

где $\eta_k=-b+k\varepsilon_1$, $y_l=-b+(l-0,5)\varepsilon_1$, $l=1,...,N$, $\varepsilon_1=2b/N$.

В итоге имеем алгебраическую систему уравнений:

$$\frac{1}{2a}\sum_{k=1}^{N}h(\eta_k)\left[\Phi_r(y_l-\eta_k)\varepsilon_1+\frac{2a[1-\frac{c_2^2}{c_1^2}]}{\pi}\left(\frac{1}{(y_l-\eta_k)}-\frac{1}{(y_l-\eta_{k-1})}\right)\right]=1.$$

Аналитические выражения волновых характеристик. Используя вспомогательное уравнение, входящее в (10), для решения которого вводится постоянная

$$H=\int_{-b}^{b}h(t)dt\,, \tag{13}$$

в терминах функции $h(y)$ из (9) и (10) получаем:

$$k_2^{-2} g_x^1(\eta) = h(\eta)[(1/4aik_1)J_1 + (e^{ik_1 d}/4aik_1)J_2 + (e^{ik_1 2d}/4aik_1)J_3 - 1];$$
$$k_2^{-2} g_x^2(\eta) = h(\eta)[(1/4aik_1)J_2 + (e^{ik_1 d}/4aik_1)[J_1 + J_3] - e^{ik_1 d}];$$
$$k_2^{-2} g_x^3(\eta) = h(\eta)[(1/4aik_1)J_3 + (e^{ik_1 d}/4aik_1)J_2 + (e^{ik_1 2d}/4aik_1)J_1 - e^{ik_1 2d}], \qquad (14)$$

где обозначено

$$J_j = \int_{-b}^{b} g_x^j(t)dt, \quad j = 1,2,3. \qquad (15)$$

После интегрирования уравнения (14) по множеству $|y| < b$ с учетом (13) получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно J_j, $j = 1,2,3$:

$$(k_2^{-2} - H/4aik_1)J_1 - (He^{ik_1 d}/4aik_1)J_2 - (e^{ik_1 2d}H/4aik_1)J_3 = -H;$$
$$-(He^{ik_1 d}/4aik_1)J_1 + (k_2^{-2} - H/4aik_1)J_2 - (e^{ik_1 d}H/4aik_1)J_3 = -He^{ik_1 d};$$
$$-(He^{ik_1 2d}/4aik_1)J_1 - (e^{ik_1 d}H/4aik_1)J_2 + (k_2^{-2} - H/4aik_1)J_3 = -He^{ik_1 2d}. \qquad (16)$$

После того как найдено решение системы (16), т. е. найдены величины J_j, $j = 1,2,3$ и параметр H, находим все необходимые волновые характеристики. В частности, коэффициенты отражения и преломления будут выражены в виде:

$$R = -\frac{1}{4aik_1}\int_{-b}^{b} g_x^1(t)dt - \frac{e^{ik_1 d}}{4aik_1}\int_{-b}^{b} g_x^2(t)dt - \frac{e^{ik_1 2d}}{4aik_1}\int_{-b}^{b} g_x^3(t)dt;$$
$$T = -\frac{e^{ik_1 2d}}{4aik_1}\int_{-b}^{b} g_x^1(t)d - \frac{e^{ik_1 d}}{4aik_1}\int_{-b}^{b} g_x^2(t)dt - \frac{1}{4aik_1}\int_{-b}^{b} g_x^3(t)dt + e^{ik_1 2d}. \qquad (17)$$

Отметим, что данная теория позволяет найти коэффициенты (17) в явном виде, а единственным вопросом, который решается здесь численно, является построение решения основного вспомогательного гиперсингулярного интегрального уравнения (13). Исходя из этого, предлагаемый метод может быть назван «полуаналитическим».

Обсуждение и результаты. На рис. 2–5 продемонстрированы некоторые примеры зависимости физических параметров от частотного параметра ak/π, ($k = k_2$) и длины трещины в упругой среде с отношением упругих скоростей $c_1/c_2 = 1{,}87$. Модуль коэффициента прохождения $|T|$ с ростом частоты после нескольких осцилляций всегда уменьшается, независимо от геометрии решетки. Осциллирующий режим и одновременно определенные потери прохождения очевидны при увеличении длины трещины b/a (рис. 2).

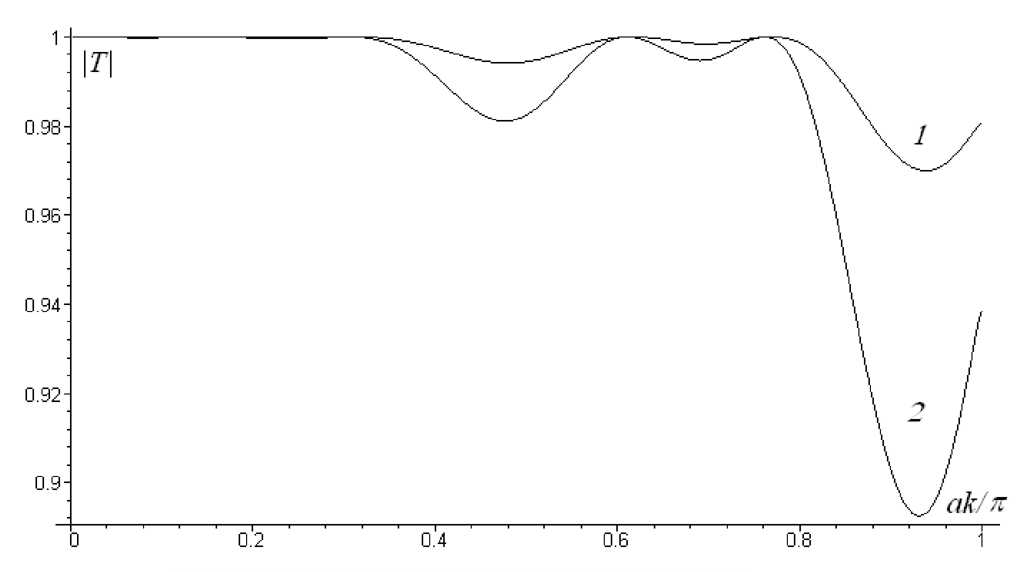


Рис. 2. Зависимость коэффициента прохождения от частоты: $a = 1$; $d = 4$;
кривая 1 — $b/a = 0{,}15$; кривая 2 — $b/a = 0{,}2$

Fig. 2. Dependence of transmission coefficient on frequency: $a = 1$; $d = 4$;
curve 1 — $b/a = 0{,}15$; curve 2 — $b/a = 0{,}2$

При фиксированных ak_2/π и d модуль коэффициента отражения $|R|$ при изменении параметра b/a может иметь различный характер поведения (рис. 3).

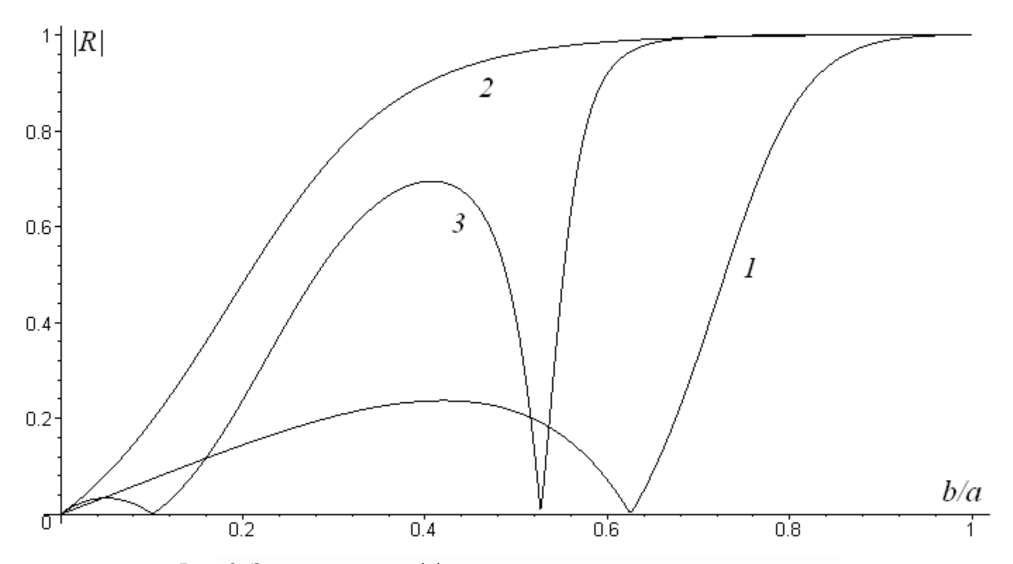


Рис. 3. Зависимость коэффициента отражения от длины трещины:
$a=1$; $d=4$; кривая 1 — $ak_2=0,222$; кривая 2 — $ak_2=0,357$; кривая 3 — $ak_2/\pi=0,595$

Fig. 3. Dependence of reflection coefficient on crack's length:
$a=1$; $d=4$; curve 1 — $ak_2=0,222$; curve 2 — $ak_2=0,357$; curve 3 — $ak_2/\pi=0,595$

Для одних частот это монотонно возрастающая функция на всем диапазоне изменения величины трещины (кривая 2). В других случаях при некотором размере трещины достигается локальный минимум (кривая 1) или даже несколько локальных минимумов (как на кривой 3). При некоторых размерах трещины может происходить полное запирание канала, когда $|T|=1$. Если d и ak_2/π зафиксированы, то максимальное отражение наступает для наибольшей трещины в материале. И наоборот, слабое отражение происходит для небольших трещин, что вполне естественно с физической точки зрения.

Также отметим, что для заданных b/a и ak_2/π величина $|T(d)|$ может достигать минимума. При этом имеются такие значения d, для которых достигается полное прохождение (рис. 4).

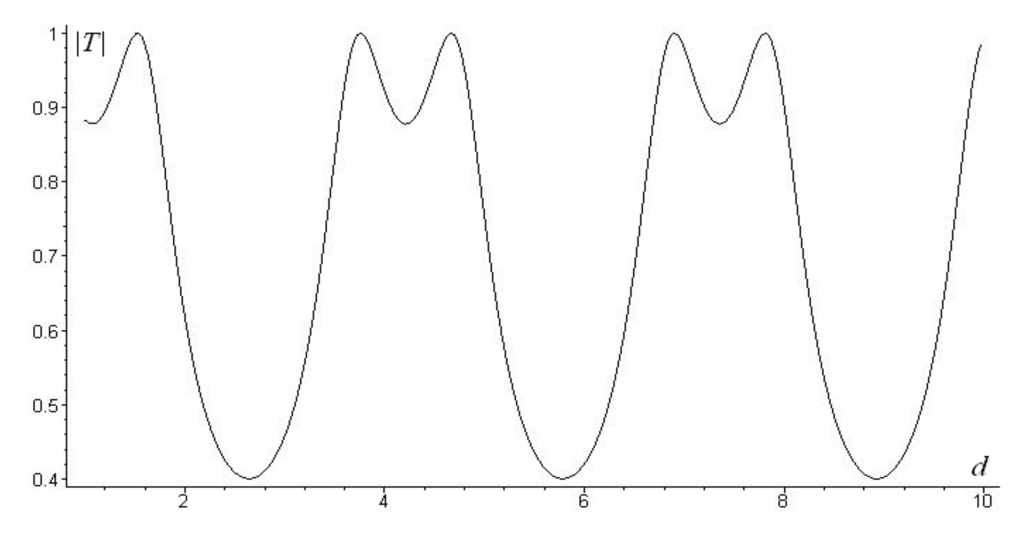


Рис. 4. Зависимость коэффициента прохождения от расстояния d; $b/a=0,45$; $ak_2=1,87$

Fig. 4. Dependence of transmission coefficient on distance d; $b/a=0,45$; $ak_2=1,87$

На рис. 5 показано, что свойство акустических фильтров достигается не только для относительно длинных трещин, что вполне естественно, но также и при средней их длине.

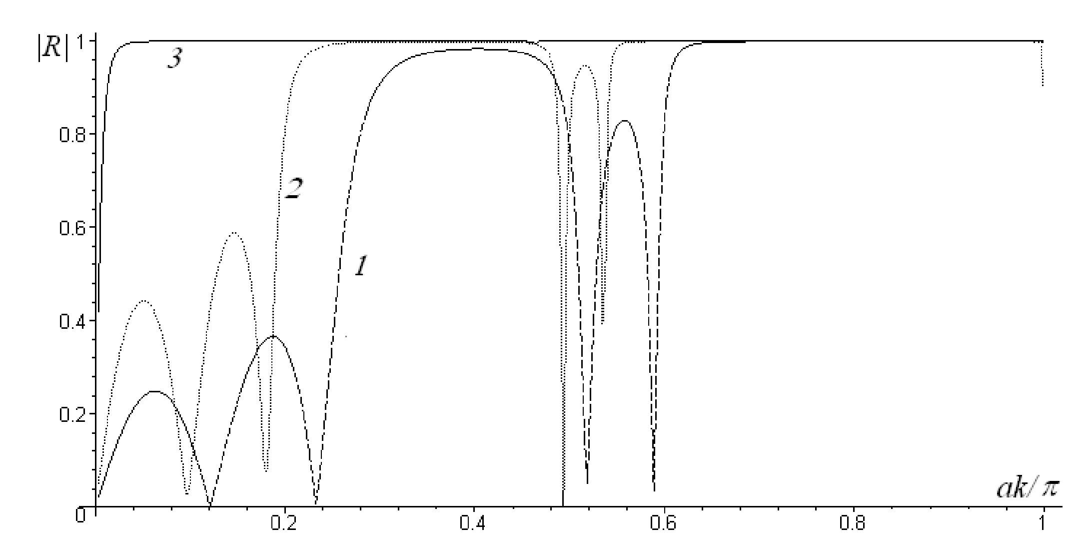


Рис. 5. Зависимость коэффициента отражения от частоты: $a = 1; d = 4;$

Кривая 1 — $b / a = 0,7;$ кривая 2 — $b / a = 0,9;$ кривая 3 — $b / a = 1$

Fig. 5. Dependence of reflection coefficient on frequency: $a = 1; d = 4;$

curve 1—$b / a = 0,7;$ curve 2 — $b / a = 0,9;$ curve 3 — $b / a = 1$

Кривая 3 для максимально длинной трещины подтверждает правильность настоящего расчета при анализе предельного случая, когда значение функции отражения становится постоянным почти на всем одномодовом частотном интервале, что вполне естественно. В самом деле, для любой геометрии в случае крайне низких частот коэффициент отражения начинает расти от нулевого значения. С другой стороны, для любой фиксированной частоты, $| R |\to 1$, когда $b / a \to 1$. Поэтому для больших трещин возрастание $| R |$ от нуля до единицы должно происходить в начале одномодоваго интервала по частоте. Однако интересно также, что уже для среднего размера трещины (кривая 1, $b / a = 0,7;$) имеется пара относительно длительных частотных интервалов, где коэффициент отражения приближается к единице, при этом существуют такие частоты, при которых запирание волны резко меняется на почти полное ее пропускание. Вообще же свойство фильтра на верхних частотах данного одномодового интервала имеет место для всех представленных значений длины b / a .

Выводы. Специфика внутренней структуры в рассмотренной задаче позволяет достичь свойств акустических фильтров за счет выбора частоты, расстояния между периодическими массивами трещин, а также длины имеющейся здесь периодической неоднородности. Метод, развитый в настоящей работе, может эффективно применяться в исследовании и более сложных трехмерных волновых задач, когда вертикальный массив, содержащий двухпериодическую систему трещин, последовательно повторяется периодически конечное число раз вдоль направления распространения волны. Троякопериодическая система будет предметом следующей работы, в которой предполагается рассмотреть некоторые новые специфические свойства волн в упругих средах, не наблюдавшиеся при исследовании аналогичных задач в скалярной постановке.

Автор выражает благодарность заведующему кафедрой теоретической и компьютерной гидроаэродинамики Института математики, механики и компьютерных наук ЮФУ профессору М. А. Сумбатяну за внимание к работе и ценные замечания при подготовке публикации.

Библиографический список

1. Achenbach, J.-D. Reflexion and transmission of scalar waves by a periodic array of screens / J.-D. Achenbach, Z.-L. Li // Wave Motion. — 1986. — Vol. 8. — P. 225–234.

2. Miles, J.-W. On Rayleigh scattering by a grating / J.-W. Miles // Wave Motion. — 1982. — Vol. 4. —P. 285–292.

3. Шендеров, Е. Л. Прохождения звука через жесткий экран конечной толщины с отверстиями / Е. Л. Шендеров // Акустический журнал. — 1970. — Т. 16, № 2. — С. 295–304.

4. Locally resonant sonic materials / Z. Liu [et al.] // Science. — 2000. — Vol. 289, iss. 5485. — P. 1734–1736.

5. Scarpetta, E. Explicit analytical results for one-mode oblique penetration into a periodic array of screens / E. Scarpetta, M. A.Sumbatyan // IMA Journal of Applied Mathematics. — 1996. — Vol. 56. — P. 109–120.

6. Scarpetta, E. Low-frequency penetration of acoustic waves through a periodic arbitrary-shaped grating: the three-dimensional problem / E. Scarpetta, M. A. Sumbatyan // Wave Motion. —1995. — Vol. 22. — P. 133–144.

7. Scarpetta, E. On wave propagation in elastic solids with a doubly periodic array of cracks / E Scarpetta, M.A.Sumbatyan // Wave Motion. —1997. — Vol. 25. — P. 61-72.

8. Scarpetta, E. On the three-dimensionl wave propagation through cascading screens having a periodic system of arbitrary openings / E. Scarpetta, V. Tibullo // International Journal of Engeneering Science. — 2008. — Vol. 46. — P. 105–111.

9. Remizov, M. Yu. Asymptotic analysis in the anti-plane high-frequency diffraction by interface cracks / M. Yu. Remizov, M. A. Sumbatyan // Applied Mathematical Letters. —2014. — Vol. 34. — P. 72–75.

10. Ремизов, М. Ю. Полуаналитический метод решения задач высокочастотной дифракции упругих волн на трещине / М. Ю. Ремизов, М. А. Сумбатян // Прикладная математика и механика. — 2013. — Т. 77, № 4. — С. 629–635.

11. Remizov, M. Yu. A semi-analytical approach in the high-frequency diffraction by cracks / M. Yu. Remizov, M. A. Sumbatyan, V. Zampoli // Mechanics Research Communications. — 2011. — Vol. 38. — P. 607–609.

12. Remizov, M. Yu. On the theory of acoustic metamaterials with a triple-periodic system of interior obstacles / M. Yu. Remizov, M. A. Sumbatyan // Springer Proceedings in Physics. — 2016. — Vol. 175. — P. 459–474.

13. Remizov, M. Yu. 3-D one-mode penetration of elastic waves through a doubly periodic array of cracks / M. Yu. Remizov, M. A. Sumbatyan // Mathematics and Mechanics of Solids. — 2016. — Vol. 4. — C. 125–133.

14. Sneddon, I.-N. Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity / I.-N. Sneddon, M. Lowengrub. — London :Wiley,1969. — 312 p.

15. Белоцерковский, С. М. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике / С. М. Белоцерковский, И. К. Лифанов // Москва : Наука, 1985. — 256 с.

References

1. Achenbach, J.-D., Li, Z.-L. Reflexion and transmission of scalar waves by a periodic array of screens. Wave Motion, 1986, vol. 8, pp. 225–234.

2. Miles, J.-W. On Rayleigh scattering by a grating. Wave Motion, 1982, vol. 4, pp. 285–292.

3. Shenderov, E.L. Prokhozhdeniya zvuka cherez zhestkiy ekran konechnoy tolshchiny s otverstiyami. [Transmission of sound through a perforated screen of finite thickness.] Akusticheskiy zhurnal, 1970, vol. 16, no. 2, pp, 295–304 (in Russian).

4. Liu, Z., et al. Locally resonant sonic materials. Science, 2000, vol. 289, iss. 5485, pp. 1734–1736.

5. Scarpetta, E., Sumbatyan, M.A. Explicit analytical results for one-mode oblique penetration into a periodic array of screens. IMA Journal of Applied Mathematics, 1996, vol. 56, pp. 109–120.

6. Scarpetta, E., Sumbatyan, M.A. Low-frequency penetration of acoustic waves through a periodic arbitrary-shaped grating: the three-dimensional problem. Wave Motion, 1995, vol. 22, pp. 133–144.

7. Scarpetta, E., Sumbatyan, M.A. On wave propagation in elastic solids with a doubly periodic array of cracks. Wave Motion, 1997, vol. 25, pp. 61-72.

8. Scarpetta, E., Tibullo, V. On the three-dimensionl wave propagation through cascading screens having a periodic system of arbitrary openings. International Journal of Engeneering Science, 2008, vol. 46, pp. 105–111.

9. Remizov, M.Yu., Sumbatyan, M.A. Asymptotic analysis in the anti-plane high-frequency diffraction by interface cracks. Applied Mathematical Letters, 2014, vol. 34, pp. 72–75.

10. Remizov, M.Yu., Sumbatyan, M.A. Poluanaliticheskiy metod resheniya zadach vysokochastotnoy difraktsii uprugikh voln na treshchine. [A semi-analytical method of solving problems of the high-frequency diffraction of elastic waves by cracks.] Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2013, vol. 77, no. 4, pp. 629–635 (in Russian).

11. Remizov, M. Yu., Sumbatyan, M.A., Zampoli,V. A semi-analytical approach in the high-frequency diffraction by cracks. Mechanics Research Communications, 2011, vol. 38, pp. 607–609.

12. Remizov, M. Yu., Sumbatyan, M.A. On the theory of acoustic metamaterials with a triple-periodic system of interior obstacles. Springer Proceedings in Physics, 2016, vol. 175, pp. 459–474.

13. Remizov, M.Yu., Sumbatyan, M.A. 3-D one-mode penetration of elastic waves through a doubly periodic array of

cracks. Mathematics and Mechanics of Solids, 2016, vol. 4, pp. 125–133.

14. Sneddon, I.-N., Lowengrub, M. Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity. London: Wiley,1969, 312 p.

15. Belotserkovskiy, S.M., Lifanov, I.K. Chislennye metody v singulyarnykh integral'nykh uravneniyakh i ikh primenenie v aerodinamike, teorii uprugosti, elektrodinamike. [Numerical methods for singular integral equations and their application in aerodynamics, elasticity theory , electrodynamics.] Moscow: Nauka, 1985, 256 p. (in Russian).

Поступила в редакцию 31.10.2016
Сдана в редакцию 31.10.2016
Запланирована в номер 11.01.2017

Received 31.10.2016
Submitted 31.10.2016
Scheduled in the issue 11.01.2017

Об авторе:

Ремизов Михаил Юрьевич, доцент кафедры «Техническая механика» Академии строительства и архитектуры Донского государственного технического университета, (РФ, 344000, Ростов-на-Дону, Социалистическая, 162), кандидат физико-математических наук, доцент,
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5078-9941,
Remizov72@mail.ru

Author:

Remizov, Mikhail Yu., associate professor of the Engineering Mechanics Department, Academy of Construction and Architecture, Don State Technical University
(ACA DSTU) (RF, Rostov-on-Don, Sotsialisticheskaya, 162)
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5078-9941,
Remizov72@mail.ru